Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica - vecchio regolamento

Pisa, 15 luglio 2024

Esercizio 1 Studiare la funzione
$$f(x) = \log\left(\frac{x-4}{x-6}\right)$$
determinandone insieme di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), estremi superiore e inferiore o massimo e minimo. Determinare gli intervalli di monotonia, gli eventuali punti di massimo e minimo locali, gli intervalli di convessità e concavità e i punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

Esercizio 2 Determinare se la successione
$$a_n = n!\left(\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2 - \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
ammette massimo e/o minimo.

Soluzione

Esercizio 3 Determinare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = 4y + e^{3x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione

L'equazione differenziale è del primo ordine lineare, quindi utilizziamo la formula risolutiva
$$y = e^{A(x)}\left(c + \int e^{-A(x)} b(x)\,dx\right), \qquad A(x) = \int a(x)\,dx.$$
Nel nostro caso $a(x) = 4$, $b(x) = e^{3x}$, quindi
$$A(x) = 4x, \qquad \int e^{-A(x)} b(x)\,dx = \int e^{-4x} e^{3x}\,dx = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$$
dove non abbiamo aggiunto le costanti arbitrarie perché già presenti nella formula risolutiva. Ne segue che
$$y(x) = e^{4x}(c - e^{-x}) = ce^{4x} - e^{3x}.$$

Calcoliamo la costante c ricavandola dalla condizione iniziale

$$0 = y(0) = c - 1$$

quindi $c = 1$ e

$$y(x) = e^{4x} - e^{3x}.$$